**Лекція.**

**Тема: Обернені тригонометричні функції.**

**Мета:** Вивчення властивостей обернених тригонометрич­них функцій:

***,***

**План лекції:**

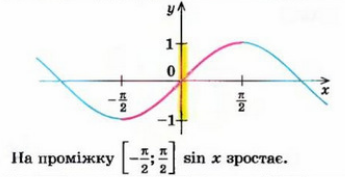
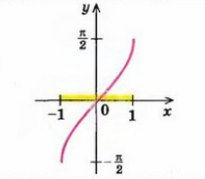
1. **Функція**
2. **Функція .**
3. **Функція**
4. **Функція**

Для одержання обернених тригонометричних функцій для кожної тригонометричної функції виділяють проміжок, на якому вона зростає (або спадає). Для позначення обернених тригонометричних функцій перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається: «арк»).

**1.Функція**

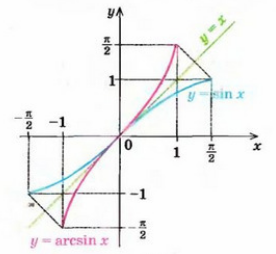
**1.1 Графік функції**

Функція  **(**рис.1 а)) зростає на проміжку [ і набуває всіх значень від -1 до 1. Отже, на цьому проміжку функція має обернену функцію, яку позначають з областю визначення [-1; 1] і областю значень [. Функція теж зростає, і її графік можна одержати з графіка функції (на заданому проміжку) симетричним відображенням відносно прямої (рис. 2).

1. ***б)***

***Рис.1***



***Рис.2***

**1.2 Значення**

За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо

, то **,** причому

* **Арксинус числа  *(* – це таке число з проміжку , синус якого дорівнює .**

**,** якщо

***Приклад 1.***

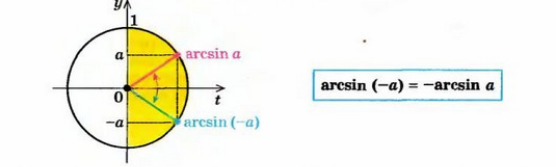
*1)* , оскільки і

2), оскільки і

3) але , бо міститься поза межами проміжку

**1.3 Непарність функції .**

Для знаходження арксинусів від’ємних чисел можна користуватися також непарністю функції **,** тобто формулою (рис.3)



***Рис.3***

***Приклад 2.***

***1)***Оскільки і , то

2)

**Задача 1.**

Знайдіть: 1) 2).

**Розв’язання:**

Нехай вираз у дужках позначимо через :

, отже .

Нехай вираз у дужках позначимо через . За означенням арксинуса одержуємо, що і

Ураховуючи, що , маємо :

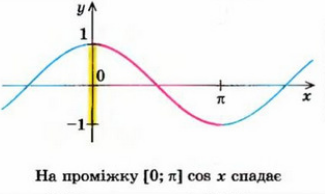
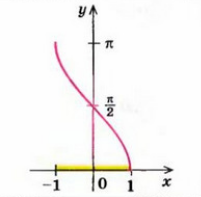
Отже,

1. **Функція .**

**2.1 Графік функції**

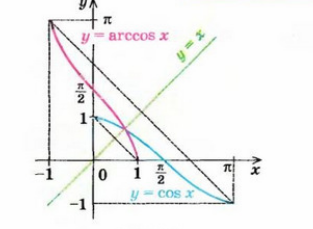
Функція ( рис.4 а)**)** спадає на проміжку [0; ] і набуває всіх значень від 1 до -1. Отже, на цьому проміжку функція має обернену функцію, яку позначають **,** з областю визначення [-1; 1] і областю значень [0; ].

Функція теж спадає, і її графік можна одержати з графіка функції  **(**на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої

***а) б)***

***Рис.4***



***Рис.5***

**2.2 Значення**

За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку) , якщо

, то , причому

* **Арккосинус числа а ( – це таке число з проміжку , косинус якого дорівнює а.**

**,** якщо

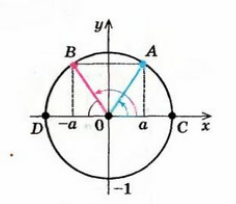
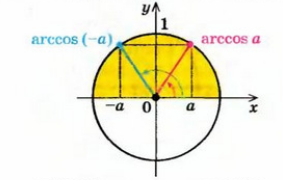
***Приклад 3.***

*1)* оскільки і

2)оскільки і  **.**

**2.3 Формула для**

Для знаходження аркосинусів від’ємних чисел можна користуватися формулою Ця властивість має просту геометричну інтерпретацію (рис.6).

***Рис.6***

Точки на тригонометричному колі (рис.6) відповідають числам  **і ,** ці точки симетричні відносно осі ординат, радіанні міри відповідних дуг доповнюють одна одну до **,** тому:

Ця рівність означає, що функція не є ні парною, ні непарною.

***Приклад 4.***



**Задача 2.**

Знайдіть:

**Розв’язання:**

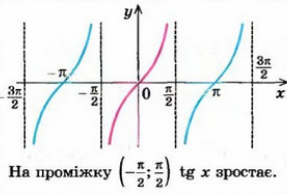
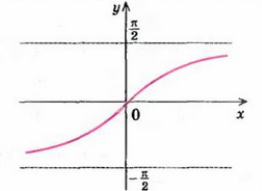
Нехай , тоді за означенням арккосинуса одержуємо , що

Отже, **.**

1. **Функція** 
   1. **Графік функції .**

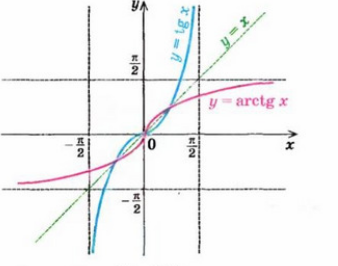
Функція (рис.7 а))зростає на проміжку і набуває всіх значень від - Отже, на цьому проміжку функція має обернену функцію, яку позначають (рис.7 б)),з областю визначення

(- і множиною значень . Функціятеж зростає, її графік можна одержати з графіка функції  **(**на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої (рис.8).

***а) б)***

***Рис.7***



***Рис.8***

* 1. **Значення**

За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо

**,** то **,** причому .

* **Арктангенс числа ( – це таке число з проміжку , тангенс якого дорівнює .**

**,** якщо

***Приклад 5.***

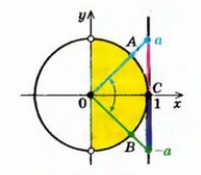
*1)* оскільки і

2) оскільки і

* 1. **Непарність функції**

Для знаходження арктангенсів від’ємних чисел можна користуватися також непарністю функції , тобто застосувати формулу

Це випливає з того, що графік функції (рис.8) симетричний відносно початку координат, а точки на лінії тангенсів є симетричними відносно осі (рис.9).



***Рис.9***

Тоді і відповідні точки на одиничному колі (у проміжку ) теж будуть симетричними відносно осі

Отже, Але

Одержуємо:

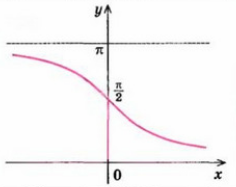
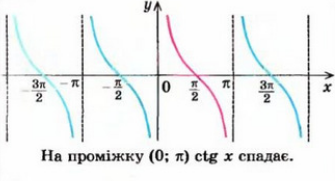
***Приклад 6.***

***1)***

1. **Функція** 
   1. **Графік функції .**

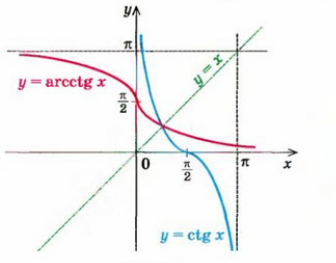
Функція (рис.10 а))спадає на проміжку (0; і набуває всіх значень від - до Отже, на цьому проміжку функція має обернену функцію , яку позначають з областю визначення

(- і областю значень (0; Функція теж спадає, її графік можна одержати з графіка функції (на заданому проміжку) задопомогою симетричного відображення його відносно прямої(рис.11).



***а) б)***

***Рис.10***



***Рис.11***

* 1. **Значення**

За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо **,** то **,** причому

* **Арккотангенс числа - це таке число з проміжку (0; , котангенс якого дорівнює .**

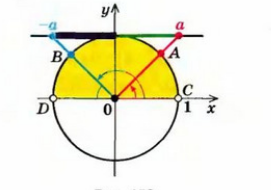
**,** якщо

***Приклад 7.***

1. оскільки і
2. оскільки і
3. оскільки і
   1. **Формула для .**

Для знаходження арккотангенсів від’ємних чисел можна користуватися формулою  Це випливає з того, що точки на лінії котангенсів (рис.12) є симетричними відносно осі Тоді відповідні точки на одиничному колі (у проміжку (0; ) теж будуть симетричними відносно осі Таким чином, а отже,

Але



***Рис.12***

Одержуємо:

Ця рівність означає , що функція не є ні парною, ні непарною.

***Приклад 8.***

**Домашнє завдання:**

**Обчислити:**

